

ФМИ ОУ 2019-2020 - Домашна работа 1

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

6 октомври 2019

Задача 1. Дадени са точките $O(0,0)$ и $P(x_0, y_0)$ в $\mathbb{R}^2$, като $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$. Дадена е и „скорост“ $C > 0$. Търсим непрекъснато диференцируема функция $x : [0, T_x] \rightarrow \mathbb{R}^2$, където T_x зависи от x , така че да са изпълнени

1. $-T_x = \int_0^{T_x} (-1) dx \longrightarrow \max$
2. $x(0) = O$
3. $x(T_x) = P$
4. $\|x'(t)\| \leq C$ за всяко $t \in [0, T_x]$

Решение. Първо ще построим едно решение (с което ще докажем, че решение съществува). Дефинираме $\bar{x}(t) := C \frac{t}{\|P\|} \cdot P$ и $T_{\bar{x}} := \frac{\|P\|}{C}$. Тогава

1. $\bar{x}(0) = O$
2. $\bar{x}(T_{\bar{x}}) = P$
3. $\|\bar{x}'(t)\| = C$ за всяко $t \in [0, T_{\bar{x}}]$

Ще покажем, че $T_x \geq T_{\bar{x}}$ за всяко друго решение $x(t)$ на задачата, т.е. че $\bar{x}$ е оптимално решение.

Ако $x(t) = (u(t), v(t))$ е произволно решение на задачата, от неравенството на Йенсен имаме

$$\begin{aligned}\|P\| = \|x(T_x)\| &= \sqrt{[u(T_x)]^2 + [v(T_x)]^2} = \sqrt{\left[\int_0^{T_x} u'(t) dt\right]^2 + \left[\int_0^{T_x} v'(t) dt\right]^2} = \\ &= T_x \sqrt{\left[\frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} u'(t) dt\right]^2 + \left[\frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} v'(t) dt\right]^2} \leq T_x \sqrt{\frac{1}{T_x} \int_0^{T_x} ([u'(t)]^2 + [v'(t)]^2) dt} = \\ &= \sqrt{T_x \int_0^{T_x} \|x'(t)\|^2 dt} \leq \sqrt{T_x \cdot C^2 \int_0^{T_x} dt} = CT_x.\end{aligned}$$

Следователно $T_x \geq \frac{\|P\|}{C} = T_{\bar{x}}$.